BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - GROUPEMENT C1

SESSION 2026

DURÉE : 2 HEURES

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Conception des processus de découpe et d'emboutissage	2
Conception des processus de réalisation de produits (2 options)	2
Conception et réalisation en chaudronnerie industrielle	2
Conception et industrialisation en construction navale	2
Développement et réalisation bois	2
Fonderie	2
Forge	2
Innovation textile (2 options)	3
Maintenance des matériels de construction et de manutention	2
Maintenance des systèmes (4 options)	2
Maintenance des véhicules	2
Motorisations toutes énergies	2
Pilotage des procédés	3
Systèmes constructifs bois et habitat	2
Techniques et services en matériels agricoles	2

Matériel autorisé :

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (10 points)

Une entreprise produit de l'aluminium selon le procédé Hall-Héroult.

L'aluminium se forme par électrolyse à une température de 960°C. Il est ensuite transféré dans un four d'affinage où il refroidit à 750°C avant d'être coulé dans des moules parallélépipédiques de dimensions 10 cm × 10 cm × 100 cm pour fabriquer des lingots d'aluminium.



Les lingots d'aluminium refroidissent alors dans une pièce ventilée à température ambiante de 25°C. Ils peuvent être démoulés quand leur température atteint 250°C.

On désigne par $T(t)$, la température, exprimée en degré Celsius (°C), de l'aluminium à l'instant t, exprimé en minute, à partir du moment où l'aluminium est coulé dans les moules.

$T'(t)$ représente la vitesse de refroidissement à l'instant t. La loi de Newton établit que cette vitesse est proportionnelle à la différence entre la température du lingot d'aluminium et la température ambiante, soit :

$$T'(t) = k\,(T(t) - T_{amb})$$

où k est une constante et T_{amb} la température ambiante de la pièce, exprimée en degré Celsius.

Partie A

1. Dans la situation considérée, on admet que $k = -0{,}05$.
   Montrer que la fonction T est solution de l'équation différentielle suivante :
   $$(E) : y' + 0{,}05\,y = 1{,}25$$
   où y désigne une fonction de la variable t définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et y' la fonction dérivée de y.

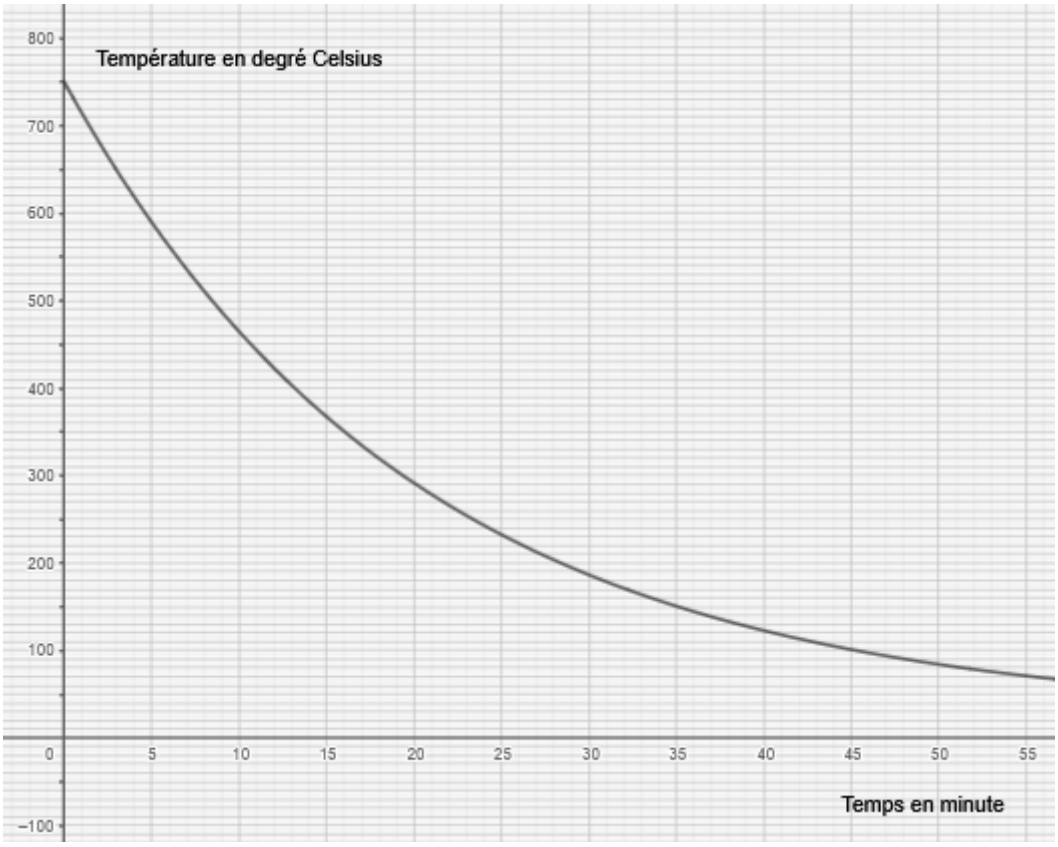
2.
   a. Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'équation différentielle $(E_0) : y' + 0{,}05\,y = 0$.
   b. Vérifier que la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = 25$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
   c. Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation différentielle (E).
   d. Au temps $t = 0$, l'aluminium est coulé dans le moule. On rappelle que la température de l'aluminium est alors de 750°C.
      En déduire l'expression de la fonction T en fonction de t.

Partie B

Dans cette partie, on admet que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$,

$$T(t) = 725\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,t} + 25.$$

La courbe représentative de la fonction T, dans un repère orthogonal, est tracée ci-dessous.



1. Avec la précision permise par le graphique :
   a. Déterminer la température de l'aluminium au bout de 10 minutes.
   b. Au bout de combien de temps la température de l'aluminium atteint-elle 200 °C ?
2. Calculer la limite de T quand t tend vers $+\infty$.
3. On admet que la fonction T est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.
   Montrer que pour tout t appartenant à $[0\,;+\infty[$, $T'(t) = -\,36{,}25\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,t}$.
4. En déduire le tableau des variations de la fonction T.
5. En quoi ce résultat est-il cohérent avec le contexte de l'exercice ?
6. Par le calcul, répondre aux questions suivantes :
   a. Pourra-t-on démouler le lingot d'aluminium dans les 15 premières minutes ? Justifier.
   b. Au bout de combien de minutes le lingot d'aluminium peut-il être démoulé ?

Partie C

On s'intéresse à la température moyenne de l'aluminium durant le refroidissement.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;b]$ est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants :

$T(t) := 725 * \exp(-0{,}05t) + 25$ $\approx T(t) := 725\, e^{-0{,}05t} + 25$
$T(t)$ Intégrale : $-14\,500\, e^{-\frac{1}{20}t} + 25\, t$

Calculer la valeur moyenne de la température de l'aluminium durant la première heure de refroidissement. On donnera un arrondi au dixième de degré près.

Exercice 2 (10 points)

Un sous-traitant automobile fabrique des supports de tableau de bord à partir de lingots d'aluminium.
Pour cela, l'aluminium est fondu et moulé sous pression pour prendre la forme d'un tableau de bord comme représenté ci-dessous.



Partie A

Le sous-traitant automobile utilise deux chaînes de production.

La première chaîne produit 30 % du stock et on sait que, sur cette chaîne, 1,8 % des supports présentent un défaut.

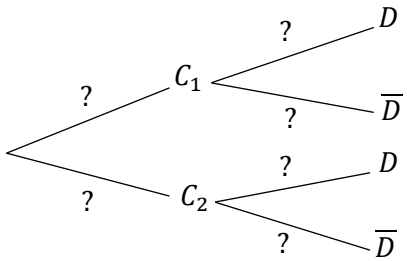
Sur la deuxième chaîne, 1,6 % des supports de tableau de bord présentent un défaut.

On choisit au hasard un support de tableau de bord dans le stock. On note :

- C_1 l'évènement « le support de tableau de bord provient de la première chaîne » ;
- C_2 l'évènement « le support de tableau de bord provient de la deuxième chaîne » ;
- D l'évènement « le support de tableau de bord présente un défaut ».

Pour tout évènement A, on note $\bar{A}$ son évènement contraire.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le support de tableau de bord choisi provienne de la première chaîne et présente un défaut.
3. Montrer que la probabilité que le support de tableau de bord présente un défaut est égale à 0,0166.
4. On choisit au hasard un support de tableau de bord du stock et on constate qu'il présente un défaut.
   Calculer la probabilité qu'il provienne de la première chaîne de production.
   On arrondira le résultat au millième.

Partie B

On admet, dans cette partie, que la probabilité de choisir au hasard dans le stock de l'entreprise un support de tableau de bord défectueux est de 0,0166.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 supports de tableau de bord choisis au hasard dans le stock de l'entreprise, associe le nombre de supports de tableau de bord défectueux dans ce prélèvement.

On admet que le stock est suffisamment grand pour assimiler chaque prélèvement à 50 tirages successifs avec remise d'un support de tableau de bord du stock.

On choisit au hasard un prélèvement de 50 supports de tableau de bord.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de n'avoir aucun support de tableau de bord défectueux dans ce prélèvement. On arrondira le résultat au millième.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un support de tableau de bord défectueux dans ce prélèvement. On arrondira le résultat au millième.

Partie C

Ce sous-traitant automobile reçoit de son fournisseur des lingots d'aluminium de forme parallélépipédique de dimensions 10 cm × 10 cm × 100 cm.

1. Sachant que la masse volumique de l'aluminium est 2 700 kg/m ^{3}, justifier que la masse d'un lingot devrait être de 27 kg.

La personne responsable de la qualité veut contrôler si les lingots d'aluminium reçus ont bien une masse de 27 kg.
Afin de vérifier la conformité d'une livraison, elle construit un test d'hypothèse unilatéral au seuil d'erreur de 5 %.

On désigne par $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 40 lingots d'aluminium prélevés au hasard dans la commande, associe la masse moyenne, en kilogramme, des lingots d'aluminium.

On suppose que le nombre de lingots d'aluminium est suffisamment élevé pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On admet que la variable aléatoire $\overline{M}$ suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma = 0{,}2$.

L'hypothèse nulle H_0 est donc « $m = 27$ ».

On admet que l'hypothèse alternative H_1 est « $m < 27$ ».

2. Expliquer pourquoi la personne responsable de la qualité choisit de faire un test unilatéral et non un test bilatéral.
3. Déterminer sous l'hypothèse H_0, une valeur arrondie au millième du réel h tel que : $P\left(\overline{M} \geq 27 - h\right) = 0{,}95$.
4. Énoncer la règle de décision du test.
5. On prélève un échantillon de 40 lingots et on obtient une masse moyenne de 26,7 kg.
   Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la livraison est conforme ?