BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B *CODE : 26MATGRB1*

SESSION 2026

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENTS
Bâtiment	2
Conception et réalisation de carrosseries	2
Conception et réalisation des systèmes automatiques	2
Enveloppe des bâtiments : conception et réalisation	2
Environnement nucléaire	2
Fluides – énergies – domotique (3 options)	2
Traitement des matériaux (2 options)	3

Matériel autorisé

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 5 pages, numérotées de 1/5 à 5/5.

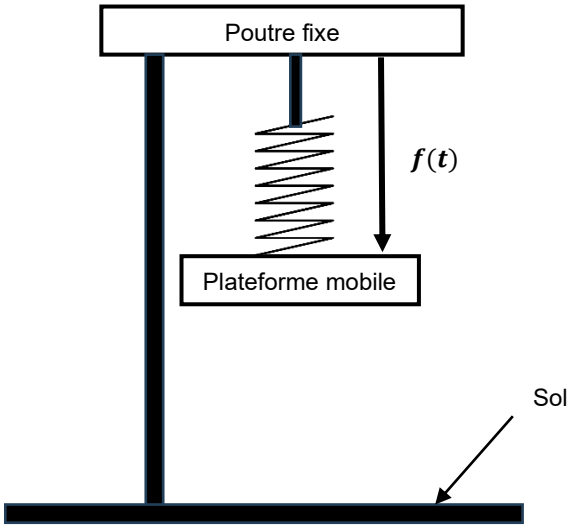
EXERCICE 1 (10 points)

Le mouvement vertical d'une plateforme mobile est modélisé par une fonction f.

$f(t)$ désigne la distance, en centimètres, entre la plateforme mobile et la poutre fixe.

t désigne le temps, en secondes, écoulé depuis le début de l'expérience.

On admet que la fonction f est définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.



Partie A – Résolution d'une équation différentielle

On sait que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 6y' + 9y = 18\,,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, et où y' est sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

On considère l'équation différentielle homogène associée

$$(E_0) : y'' + 6y' + 9y = 0\,.$$

1. Résoudre dans **R** l'équation $r^2 + 6r + 9 = 0$.

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_0).

On fournit les formules suivantes :

	Équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$	Équation caractéristique $ay'' + by' + c = 0$
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2	$y(t) = C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	Une solution réelle r_0	$y(t) = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{r_0 t}$.
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$	$y(t) = [C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$

3. Vérifier que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 2$ est solution de l'équation différentielle (E).

4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

5. On sait que la fonction f vérifie les conditions initiales $f(0) = 20$ et $f'(0) = -10$.
Montrer que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, par

$$f(t) = 2 + (18 + 44t)\mathrm{e}^{-3t} .$$

Partie B – Étude d'une fonction

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, par

$$f(t) = 2 + (18 + 44t)\mathrm{e}^{-3t} .$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la distance entre la plateforme mobile et la poutre fixe 1 seconde après le début de l'expérience. On arrondira au millimètre.

2. On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 2$.
La courbe $\mathcal{C}$ possède-t-elle une asymptote ? Si oui, donner son équation.

3. On admet que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a

$$f'(t) = (-10 - 132t)\mathrm{e}^{-3t} .$$

Expliquer pourquoi on peut en déduire que la plateforme mobile se dirige vers la poutre et non pas vers le sol.

4. Réaliser un schéma donnant sommairement l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et sur lequel les résultats obtenus aux questions **2** et **3** apparaîtront.

EXERCICE 2 (10 points)

Une collectivité équipe un immeuble avec des chauffe-eau.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A – Probabilités conditionnelles

On dispose des informations suivantes :

70 % des chauffe-eau sont de la marque A. Parmi eux, 10 % sont défectueux.
30 % des chauffe-eau sont de la marque B. Parmi eux, 15 % sont défectueux.

On choisit un chauffe-eau au hasard et on note les évènements :

A : « le chauffe-eau est de la marque A ».
D : « le chauffe-eau est défectueux ».

1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Déterminer la probabilité que le chauffe-eau soit de la marque A et soit défectueux.

3. Montrer que la probabilité $P(D)$ est égale à $0{,}115$.

4. On sait que le chauffe-eau est défectueux. Le réparateur déclare : « *Le plus probable est qu'il s'agisse d'un chauffe-eau de la marque B car ils sont moins fiables.* »
Que penser de cette déclaration ? Justifier.

Partie B – Loi binomiale

On s'intéresse à la température de l'eau d'un chauffe-eau.

Chaque minute la température est contrôlée. Si la température n'est pas conforme, une alerte est déclenchée.

La probabilité pour que, durant un intervalle d'une minute, une alerte soit déclenchée est égale à $0{,}013$. Cette probabilité est identique quelle que soit l'intervalle d'une minute considéré.

On observe le chauffe-eau sur une journée, soit 24 heures, et on note X le nombre d'alertes déclenchées durant ces 24 heures.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Justifier que ses paramètres sont : $n = 1440$ et $p = 0{,}013$.

2. Déterminer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Déterminer la probabilité, arrondie au millième, qu'il y ait exactement 20 alertes déclenchées durant la journée.

4. On décide d'approcher la variable aléatoire X par une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre

$$\lambda = 18{,}72.$$

a. Expliquer la valeur choisie pour le paramètre λ.

b. Déterminer la probabilité $P(Y \leq 15)$, arrondie au millième.

Partie C – Test d'hypothèse

Afin de pouvoir être aisément installé, un chauffe-eau ne doit pas être trop lourd.
Le constructeur assure que la masse moyenne des chauffe-eau est égale à 55 kg.

Un technicien a l'intuition que la masse moyenne est en réalité supérieure à 55 kg. Il souhaite donc mettre en place un test unilatéral à partir d'un échantillon aléatoire de 36 chauffe-eau.

On note Z la variable aléatoire qui, à chaque chauffe-eau choisi au hasard dans la production, associe sa masse exprimée en kilogramme.

La variable aléatoire Z suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 2{,}4$ kg.

On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire de 36 chauffe-eau prélevé dans la production, associe la moyenne des masses des chauffe-eau de cet échantillon. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 55$.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu > 55$.

Sous l'hypothèse nulle H_0 , on admet que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit une loi normale de moyenne 55 et d'écart-type $\dfrac{2{,}4}{\sqrt{36}}$.

1. Déterminer le réel h tel que, sous l'hypothèse nulle, on a $P\left(\overline{Z} < 55 + h\right) = 0{,}95$.

2. Énoncer la règle de décision du test.

3. La masse totale des 36 chauffe-eaux est égale à 2016 kg.
Peut-on confirmer l'intuition du technicien ?