

## Exercice 1 (5 points)

1. Calculons les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-2 \\ -1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme  $z_{\overrightarrow{AC}} = 0$  et  $z_{\overrightarrow{AB}} = -1$ , les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires.

**Donc les points A, B et C définissent un plan.**

- 2.

a.  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + (-1) \times (-3) + 4 \times (-1) = 1 + 3 - 4 = 0$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) + 4 \times 0 = -2 + 2 = 0$$

**Le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc c'est un vecteur normal au plan (ABC).**

- b.  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan (ABC)

Pour tout point  $M(x; y; z)$  du plan (ABC), on a  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2) \times 1 + (y-1) \times (-1) + (z-1) \times 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 - y + 1 + 4z - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x - y + 4z - 5 = 0}$$

3. La droite  $\Delta$  étant orthogonale au plan (ABC), elle a pour vecteur directeur  $\vec{n}$ .

Pour tout point  $M(x; y; z)$  de la droite  $\Delta$  passant par D, on a  $\overrightarrow{DM} = t \vec{n}$  avec  $t$  réel.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x = t} \\ \mathbf{y = -t} \\ \mathbf{z = 4t + 2} \end{cases} \text{ avec } t \text{ réel}$$

4. La droite  $\Delta$  étant orthogonale au plan (ABC), le projeté orthogonal de D sur ce plan est donc l'intersection de la droite et du plan.

À partir des équations de la droite et du plan, on a :

$$t - (-t) + 4(4t + 2) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow t + t + 16t + 8 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 18t = -3$$

$$t = -\frac{1}{6}$$

En remplaçant dans l'équation paramétrique de la droite  $\Delta$  :

$$\begin{cases} \mathbf{x = -\frac{1}{6}} \\ \mathbf{y = \frac{1}{6}} \\ \mathbf{z = 4 \times \left(-\frac{1}{6}\right) + 2 = \frac{4}{3}} \end{cases}$$

**$H\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$  est bien le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).**

# l'Étudiant

5.

a.  $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -(-2) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

**Le triangle  $ABC$  est bien isocèle en  $B$ .**

b. On sait que  $A = \frac{1}{2} \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} AC \times BI$  avec  $I$  milieu de  $[AC]$  car le triangle est isocèle en  $B$ .

$$AC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

Coordonnées du milieu de  $[AC]$ :  $I(1; 0; 1)$

$$BI = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Donc } A = \frac{1}{2} \times \sqrt{8} \times 3 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3$$

$$A = 3\sqrt{2}$$

6.

a. La base est le triangle  $ABC$  et la hauteur est la longueur  $DH$ .

$$\|\overrightarrow{DH}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{36}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = 1$$

b. On sait que  $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times A_{BCD} \times h = 1$  avec  $h$  distance de  $A$  au plan  $(BCD)$ .

$$\text{Donc } A_{BCD} = \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

7.  $D_k(0; 0; k)$

a. Les points  $A, B, C$  et  $D$  sont coplanaires si  $D_k$  appartient au plan  $(ABC)$

$$\text{Soit } 0 - 0 + 4k - 5 = 0 \Leftrightarrow 4k = 5 \Leftrightarrow k = \frac{5}{4}$$

**$D_k$  appartenant au plan  $(ABC)$ , il est son propre projeté orthogonal.**

b. Pour que  $A$  soit le projeté orthogonal de  $D_k$ , il faut que le vecteur  $\overrightarrow{AD_k} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ k-1 \end{pmatrix}$  soit colinéaire au vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

On cherche s'il existe  $\lambda$  tel que  $\overrightarrow{AD_k} = \lambda \vec{n}$

$$\text{Donc } \begin{cases} -2 = \lambda \\ -1 = -\lambda \\ k-1 = 4\lambda \end{cases}$$

Ce qui est **impossible**, car on ne peut pas avoir  $\lambda = -2$  et  $\lambda = 1$ .

# l'Étudiant

## Exercice 2 (5 points)

### Partie A : modèle discret

$$V_0 = 0 \text{ et } V_{n+1} = 0,995V_n + 6$$

- $V_1 = 0,995 \times 0 + 6 = 6$   
 $V_2 = 0,995 \times 6 + 6 = 11,97$

2.

```
def volume(n):  
    v = 0  
    for k in range(n):  
        v = 0.995*v + 6  
    return v
```

def volume(n):  
 V = 0  
 for k in range(n):  
 V = 0.995 \* V + 6  
 return V

- On pose  $P_n: V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$

#### Initialisation :

On a  $V_0 = 0$  et  $V_1 = 6$

Donc on a bien  $V_0 \leq V_1 \leq 1200$

La proposition est initialisée.

#### Hérédité :

On suppose que pour  $k$  donné,  $P_k$  est vraie soit  $V_k \leq V_{k+1} \leq 1200$

On veut montrer la proposition au rang suivant soit  $V_{k+1} \leq V_{k+2} \leq 1200$ .

$$V_k \leq V_{k+1} \leq 1200$$

$$\Rightarrow 0,995V_k \leq 0,995V_{k+1} \leq 0,995 \times 1200$$

$$\Leftrightarrow 0,995V_k \leq 0,995V_{k+1} \leq 1194$$

$$\Rightarrow 0,995V_k + 6 \leq 0,995V_{k+1} + 6 \leq 1194 + 6$$

$$\Leftrightarrow V_{k+1} \leq V_{k+2} \leq 1200$$

La proposition est héréditaire.

#### Conclusion :

La proposition étant initialisée pour  $n = 0$  et héréditaire pour tout  $n \geq 0$ , d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

- D'après la propriété précédente, la suite  $(V_n)$  est croissante et majorée par 1200, donc elle converge.

$$\text{On pose } \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_{n+1}$$

En passant à la limite l'expression  $V_{n+1} = 0,995V_n + 6$ , on obtient  $\ell = 0,995\ell + 6$

$$\Leftrightarrow 0,005\ell = 6 \Leftrightarrow \ell = \frac{6}{0,005} = 1200$$

### Partie B : modèle continu

La fonction  $v$  est solution de  $(E): y' = -0,005y + 6$   
 $v(0) = 0$

# l'Étudiant

1.

a. Solutions de l'équation différentielle :

Elles sont de la forme  $t \mapsto Ce^{-0,005t} - \frac{6}{-0,005}$  soit  $t \mapsto Ce^{-0,005t} + 1200$

b. On sait que  $v(0) = 0$ , donc  $Ce^{-0,005 \times 0} + 1200 = 0$

$$\Leftrightarrow C + 1200 = 0 \Leftrightarrow C = -1200$$

Donc pour tout  $t \in [0; +\infty[$ , on a  $v(t) = 1200(1 - e^{-0,005t})$

c. On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,005x} = 0$

Donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 1200$

d. On calcule la dérivée :

$$v'(t) = 1200 \times 0,005e^{-0,005t} = 6e^{-0,005t}$$

La fonction exponentielle étant toujours positive sur  $[0; +\infty[$ , on a  $v'(t) > 0$  sur  $[0; +\infty[$ . La fonction  $v$  est donc croissante sur  $[0; +\infty[$ .

2.  $\frac{5}{100} \times 30\,000 = 1500$

Le nettoyage complet a lieu quand on a 1 500 L de substance polluante. Or la fonction est croissante et a pour limite 1 200, donc la limite ne sera jamais atteinte.

Le propriétaire n'aura pas besoin de procéder au nettoyage.

3. On résout  $v(t) > 50$

$$\Leftrightarrow 1200(1 - e^{-0,005t}) > 50$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-0,005t} > \frac{50}{1200}$$

$$\Leftrightarrow -e^{-0,005t} > -\frac{23}{24}$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,005t} < \frac{23}{24}$$

$$\Leftrightarrow -0,005t < \ln\left(\frac{23}{24}\right)$$

$$\Leftrightarrow t > -200 \ln\left(\frac{23}{24}\right)$$

$$\Leftrightarrow t > 200 \ln\left(\frac{24}{23}\right)$$

$$200 \ln\left(\frac{24}{23}\right) \approx 8,512$$

$$0,512 \times 60 = 30,72$$

Donc le volume de la substance dépasse 50 litres au bout de 8 h 31 min.

# L'Étudiant

## Exercice 3 (4 points)

### 1. Arbre de probabilité

On sait que  $P(O) = 0,52$ ,  $P_O(F) = 0,32$  et  $P(F) = 0,2$

On cherche  $P_F(O) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)}$

On cherche  $P_F(O) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)} = \frac{0,52 \times 0,32}{0,2} = \frac{0,1664}{0,2} = 0,832$

**L'affirmation 1 est vraie.**

### 2. On a deux issues : « la personne choisie est un musicien professionnel » avec la probabilité $p = 0,062$ ou non. On répète 5000 fois le tirage d'une personne de manière identique et indépendante. $X$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5000$ et $p = 0,062$ .

$P(X \leq 340) \approx 0,962$

**L'affirmation 2 est fausse.**

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

On sait que  $E(X) = np = 5000 \times 0,062 = 310$

Et que  $V(X) = np(1 - p) = 5000 \times 0,062 \times 0,938 = 290,78$

On cherche dans l'intervalle  $]230; 390[ = ]310 - 80; 310 + 80[$ , alors  $a = 80$ .

$$P(|X - 310| \geq 80) \leq \frac{290,78}{80^2} \Leftrightarrow P(|X - 310| \geq 80) \leq 0,0454$$

Donc  $P(|X - 310| < 80) \geq 1 - 0,0454 \Leftrightarrow P(|X - 310| < 80) \geq 0,9546$

**L'affirmation 3 est vraie.**

### 3. Pour former une équipe, il faut d'abord choisir 2 musiciens professionnels parmi les 4, puis 3 personnes parmi les 6 restantes, l'ordre ne compte pas.

$$\binom{4}{2} = 6 \text{ et } \binom{6}{3} = 20$$

On a donc  $6 \times 20 = 120$  choix possibles.

**L'affirmation 4 est vraie.**

## Exercice 4 (6 points)

### Partie A

- À l'aide du graphique :
  - Au point d'abscisse 1, la tangente est horizontale, donc  $f'(1) = 0$ .
  - $f(x) = 0$  correspond au moment où la courbe coupe l'axe des abscisses, donc à l'abscisse du point A soit  $\frac{1}{2}$ .
- $f'(\frac{1}{2})$  correspond au coefficient directeur de la tangente  $T_A$  soit  $f'(\frac{1}{2}) = \frac{e^2}{1-\frac{1}{2}} = 2e^2$ .
- Quand  $f$  est négative, la primitive est décroissante (donc sur  $[0; \frac{1}{2}[$  et croissante sur  $]\frac{1}{2}; +\infty[$ .

La courbe de la primitive admet une tangente horizontale en  $x = \frac{1}{2}$  et à ce point, on attend un minimum.

Les primitives de  $f$  peuvent donc être représentées par les courbes  $C_1$  et  $C_2$ .

### Partie B

$$f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3} \text{ sur } [0; +\infty[$$

- $f(x) = (2x - 1)e^{-2x+1+2}$   
 $\Leftrightarrow f(x) = (2x - 1)e^{-2x+1} \times e^2$   
 $\Leftrightarrow f(x) = (2x - 1)e^{-(2x-1)} \times e^2$   
 $\Leftrightarrow f(x) = \frac{e^2(2x-1)}{e^{2x-1}} = e^2 \times \frac{2x-1}{e^{2x-1}}$
  - Si on pose  $X = 2x - 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty$   
Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{e^{2x-1}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$  par croissances comparées.  
On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- $f$  est un produit de fonctions avec  $u(x) = 2x - 1$  et  $v(x) = e^{-2x+3}$   
 $u'(x) = 2$  et  $v'(x) = -2e^{-2x+3}$   
Donc  $f'(x) = 2e^{-2x+3} + (2x - 1) \times (-2e^{-2x+3})$   
 $f'(x) = e^{-2x+3}(2 - 4x + 2)$   
 $f'(x) = e^{-2x+3}(4 - 4x)$

# l'Étudiant

- b. On sait que  $e^{-2x+3} > 0$  sur  $[0; +\infty[$  et  $4 - 4x > 0 \Leftrightarrow 4 > 4x \Leftrightarrow 1 > x$   
On en déduit le tableau de variations suivant :

$t$	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$-e^3$	$e$	0

3. La contrainte impose que  $f(\alpha) = 0,15$  car la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et l'écart est 0,3 cm.

Sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ , la fonction  $f$  est strictement décroissante.

$$f(1) = e \approx 2,718 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Or  $0,15 \in [0; e]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution  $\alpha \in [1; +\infty[$  à l'équation  $f(x) = 0,15$

$$f(3,3) \approx 0,153 \text{ et } f(3,4) = 0,1298$$

$$f(3,31) \approx 0,1505 \text{ et } f(3,32) = 0,1481$$

**Donc une valeur approchée à  $10^{-1}$  près est  $\alpha \approx 3,3$**

## Partie C

1.  $I = \int_{0,5}^{3,3} f(x) dx$

$$I = \int_{0,5}^{3,3} ((2x - 1)e^{-2x+3}) dx$$

On pose  $u(x) = 2x - 1$  et  $v'(x) = e^{-2x+3}$

On a donc  $u'(x) = 2$  et  $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$

$$\text{Donc } I = \left[ -\frac{1}{2}(2x - 1)e^{(-2x+3)} \right]_{0,5}^3 - 2 \left( -\frac{1}{2} \right) \int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3} dx$$

$$\Leftrightarrow I = \left[ -\frac{1}{2}(2x - 1)e^{(-2x+3)} \right]_{0,5}^3 + \int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3} dx$$

$$\Leftrightarrow I = \left[ -\frac{1}{2}(2x - 1)e^{(-2x+3)} \right]_{0,5}^3 + \left[ -\frac{1}{2}e^{-2x+3} \right]_{0,5}^3$$

$$\Leftrightarrow I = \left[ -xe^{(-2x+3)} \right]_{0,5}^3$$

$$\Leftrightarrow I = -3e^{-3} + 0,5e^2$$

$$\Leftrightarrow I \approx 3,6$$

2. L'intégrale  $I$  correspond à la moitié de l'aire du logo.

Donc  $V \approx 3,6 \times 2 \times 0,2 \approx 1,4 \text{ cm}^3$  arrondi au dixième